PROGRESSÃO ARITMÉTICA I

OBJETIVO:

1. Compreender a definição, elementos e as regularidades da progressão aritmética (PA);
2. Conhecer as propriedades da PA;
3. Resolver problemas envolvendo a progressão aritmética (PA);

Progressão Aritmética 1

Habilidade / Competência

EM13MAT507:

Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas

Infográfico P.A.

Situação: Valor que sofre redução

O preço de uma máquina nova é R$ 150 000,00. Com o uso, seu valor sofre uma redução de R$ 2 500,00 por ano. Sendo assim, por qual valor o proprietário da máquina poderá vendê-la daqui a 10 anos?

Solução

O problema indica que a cada ano o valor da máquina sofre uma redução de R$ 2500,00. Logo, no primeiro ano de uso, seu valor cairá para R$ 147 500,00. No ano seguinte será R$ 145 000,00, e assim por diante.

Percebemos então, que essa sequência forma uma PA de razão igual a - 2 500. Usando a **fórmula do termo geral da PA**, podemos encontrar o valor pedido.

➡ **$a_n = a_1 + (n - 1) . r$**

Substituindo os valores, temos:

$a_{10} = 150\ 000 + (10 - 1) . (- 2\ 500)$

$a_{10} = 150\ 000 - 22\ 500$

$a_{10} = 127\ 500$

Portanto, ao final de 10 anos o valor da máquina será de **R$ 127 500,00.**

Situação: Encontrando valores desconhecidos

O triângulo retângulo representado na figura (ao lado), apresenta um perímetro igual a 48 cm e área igual a 96 cm². Quais são as medidas de x, y e z, se, nesta ordem, formam uma PA?

Solução

Conhecendo os valores do perímetro e da área da figura, podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y + z = 48 \\ (x.y)/2 = 96 \end{cases}$$

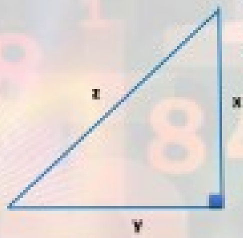
Mas, como os lados formam uma PA, então:

x = y - r

z = y + r

Onde r é a razão da PA.

Continua...



Substituindo o **x** e o **z** no sistema, temos:

y - r + y + y + r = 48

(y - r).y / 2 = 96

Resolvendo o sistema, temos:

3y = 48

Y^2 - ry = 2 . 96 => 192

Isolando o **y** na primeira equação, temos:

y = 48/3 => 16

Substituindo o valor encontrado de **y** na segunda equação, temos:

16^2 - 16r = 192

256 - 16r = 192

r = 64/16 => 4

Agora que conhecendo o valor do y e da razão, basta substituir esses valores nas expressões de x e z:

x = 16 – 4 = 12

z = 16 + 4 = 20

Os valores dos lados do triângulo retângulo são **12 cm, 16 cm e 20 cm.**

Situação: Maratona ciclista

Um ciclista percorre 15 km na primeira hora de uma corrida. Na segunda hora de corrida, seu rendimento cai e ele só consegue percorrer 13 km, e na hora seguinte 11 km. Continuando nesta sequência, quantos quilômetros ele conseguirá percorrer nas 6 horas de prova?

Solução

Para calcular o total de quilômetros percorridos em 6 horas, precisamos somar os quilômetros percorridos em cada hora.

➡ A partir dos valores informados, é possível notar que a sequência indicada é uma PA, pois a cada hora ocorre uma redução de 2 quilômetros **(13-15 = - 2).**

Continua...

Portanto, podemos **usar a fórmula da soma de uma PA** para encontrar o valor pedido, ou seja:

➡ **S(6) = (a1 + a2)/2 * 6**

Sabemos que **o primeiro termo da PA é 15**, que sua **razão é igual a - 2** e que o **número de termos é igual a 6**. Assim, para calcular a soma de todos os termos, falta apenas encontrar o valor de **a6** que encontramos fazendo:

➡ **a6 = a1+(n - 1).r => 15 + (6 - 1) . (- 2) => 15 + (-10) => 5**

Agora que conhecemos o valor de **a6**, basta substituir todos os valores na fórmula da soma para encontrar o seu valor:

➡ **a6 = a1 + (n-1)*r => 15 + (6-1)*(-2) => 15 + (-10) => 5**

Assim, **ao final de 6 horas,** o ciclista percorreu **60 km.**

Situação: Reforma de obra/andares

Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares **1, 3, 5, 7**, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares **1, 4, 7, 10**, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar.
Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro. Qual é o número de andares desse edifício?

Continua...

Os andares trabalhados por **João** formam uma PA, cuja a **razão é igual a 2**. Já os andares que **Pedro** trabalhou **formam uma PA de razão igual a 3.**
Contudo, temos a informação que em exatamente 20 andares tanto João quanto Pedro trabalharam juntos. Desta maneira, vamos tentar **encontrar alguma relação entre esses andares**.
Para isso, vamos analisar as duas progressões dadas. No esquema abaixo, **marcamos com círculos vermelhos os andares em que ambos trabalharam**

Sequência João: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

Sequência Pedro: 1, 4, 7, 10, 13, ...

Assim, temos: **7 - 1 = 6** **13 - 7 = 6**

Continua...

- **Note** que esses andares **formam uma nova PA (1, 7, 13, ...)**, cuja **razão é igual a 6** e que **possui 20 termos**, conforme indicado no enunciado do problema.

- Sabemos ainda, que o último andar do prédio faz parte dessa PA, pois o problema informa que eles trabalharam juntos também no último andar.

Assim, podemos escrever:

- $a_n = a_1 + (n - 1) . r$
  $a_{20} = 1 + (20 - 1) . 6 \Rightarrow 1 + 19 . 6 \Rightarrow 1 + 114 \Rightarrow$ **115 (número de andares desse edifício)**

Situação: Campeonato de futebol

Admita a realização de um campeonato de futebol no qual as advertências recebidas pelos atletas são representadas apenas por **cartões amarelos**. Esses cartões são convertidos em **multas**, de acordo com os seguintes critérios:
•os **dois primeiros cartões recebidos não geram multas**;
•o terceiro cartão gera multa de **R$ 500,00**;
•os cartões seguintes geram multas cujos valores são sempre acrescidos de **R$ 500,00** em relação ao valor da multa anterior.
Na tabela, indicam-se as multas relacionadas aos cinco primeiros cartões aplicados a um atleta.

Cartão amarelo (recebido)	Valor da multa (R$)
1o	-
2o	-
3o	500
4o	1.000
5o	1.500

Considere um atleta que tenha recebido 13 **cartões amarelos** durante o campeonato.

O valor total, em reais, das multas geradas por todos esses cartões equivale a:

Continua...

Observando a tabela, notamos que a sequência forma uma PA, cujo **primeiro termo é igual a 500** e a **razão é igual a 500**.

Como **o jogador recebeu 13 cartões** e que só **a partir do 3º cartão** é que passa a pagar, então, a **PA terá 11 termos (13 -2 = 11).** Vamos então calcular o valor do último termo dessa PA:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
$a_{11} = 500 + (11 - 1) \cdot 500 \Rightarrow 500 + 10 \cdot 500 \Rightarrow 500 + 5000 \Rightarrow 5500$

Agora que já sabemos o valor do último termo, podemos encontrar a soma de todos os termos da PA:

Sn = (a1 + an)*n/2

Sn (500 + 5500)*11/2 => 3000*11 => 33000

Cartão amarelo (recebido)	Valor da multa (R$)
1o	-
2o	-
3o	500
4o	1.000
5o	1.500

Situação: Projeção de produção

As projeções para a produção de arroz no período de **2012 - 2021**, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

ANO	Projeção de produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de **2012 a 2021** será de:

Continua...

Com os **dados da tabela**, identificamos que a sequência forma uma PA, com o **primeiro termo igual a 50,25** e a **razão igual a 1,25**.

No período de 2012 a 2021 temos 10 anos, portanto, a PA terá 10 termos.

$a_n = a_1 + (n - 1) . r$

$a_{10} = 50,25 + (10 - 1) . 1,25$

$a_{10} = 50,25 + 11,25$

$a_{10} = 61,50$

Para encontrar a quantidade total de arroz, vamos calcular a soma dessa PA:

Sn = (50,25 + 61,50)/2 * 10

Sn = 558,75 (quantidade total de arroz, em toneladas, produzida no período de 2012 a 2021)

ANO	Projeção de produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

Situação: Soma de termos

Se (a_1, a_2,..., a_{13}) é uma progressão aritmética (PA) cuja soma dos termos é igual a 78, então a_7 é igual a:

Solução:

As informações que temos é que a **PA apresenta 13 termos** e que **a soma dos termos é igual a 78**, ou seja:
S13 = (a1 + a13/2)*13 => 78

Como não conhecemos o valor de **a1**, de **a13**, nem o valor da razão, não conseguimos, a princípio, encontrar esses valores.
Entretanto, observamos que o valor que queremos calcular (**a7**) é o **termo central da PA.**

Com isso, podemos **usar a propriedade que diz que o termo central é igual a média aritmética** dos extremos, então: **a7 = a1 + a13/2**

Substituindo essa relação na fórmula da soma: **a7 * 13 = 78 => a7 = 78/13 => 6**

Situação: Possíveis valores/soma de termos

Considere uma progressão aritmética cujos três primeiros termos são dados por
$a_1 = 1 + x$, $a_2 = 6x$, $a_3 = 2x^2 + 4$, em que x é um número real.

a) Determine os possíveis valores de x.
b) Calcule a soma dos 100 primeiros termos da progressão aritmética correspondente ao menor valor de x encontrado no item a)

Solução:

a) Sendo **a2** o termo central da PA, então ele é igual a média aritmética de **a1** e **a3**, ou seja:

6x = [(1 + x) + (2x^2 + 4)]/2
12x = 1 + x + 2x^2 + 4
12x = 2x^2 + x + 5
2x^2 + x + 5 - 12x = 0
2x^2 -11x + 5 = 0   **a=2, b= -11, c=5**

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$
$$\Delta = (-11)^2 - 4.2.5$$
$$\Delta = 121 - 40$$
$$\Delta = 81$$
$$x_1 = \frac{-(-11)+\sqrt{81}}{2.2} = \frac{11+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$
$$x_2 = \frac{-(-11)-\sqrt{81}}{2.2} = \frac{11-9}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Portanto **x = 5** ou **x = 1/2**

Continua...

b) Para calcular a soma dos 100 primeiros termos da PA, usaremos x = 1/2, pois o problema determina que devemos usar o menor valor de x.

Considerando que a soma dos 100 primeiros termos é **encontrada através da fórmula:**

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}).100}{2}$$

Percebemos que antes precisamos calcular os valores de a1 e a100. **Calculando esses valores**, temos:

$$a_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$a_2 = 6.\frac{1}{2} = 3$$
$$r = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$
$$a_{100} = a_1 + (n-1)r$$
$$a_{100} = \frac{3}{2} + (100-1).\frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{297}{2} = \frac{300}{2} = 150$$

Agora que já conhecemos todos os valores que necessitávamos, podemos **encontrar o valor da soma:**

$$S_{100} = \frac{(\frac{3}{2} + 150).100}{2}$$
$$S_{100} = \frac{(\frac{3+300}{2}).100}{2}$$
$$S_{100} = \frac{303.100}{4} = \frac{30300}{4} = 7575$$

Assim, a soma dos **100 primeiros termos da PA será igual a 7575.**

Parabéns a todos pela participação!

Hoje, conseguimos:

- aplicar a matemática em situações do nosso cotidiano e trabalhamos com as habilidades e competências dos conceitos da matemática na Progressão Aritmética (P.A.)

Sucesso !!

Porque eu fazia do amor um cálculo matemático errado: pensava que, somando as compreensões, eu amava. Não sabia que, somando as incompreensões é que se ama verdadeiramente. Porque eu, só por ter tido carinho, pensei que amar é fácil.

Clarice Lispector

Referências:

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]